模块二 函数三类基础题型

第 1 节 判断函数零点所在区间（★☆）

强化训练

1.（2022•焦作一模•★）设函数 $f(x)=2^x+\frac{x}{3}$ 的零点为 x_0，则 $x_0\in$（　　）

（A）$(-4,-2)$　　（B）$(-2,-1)$　　（C）$(1,2)$　　（D）$(2,4)$

答案：B

解析：先判断单调性，因为 $y=2^x$ 和 $y=\frac{x}{3}$ 都在 $\mathbf{R}$ 上↗，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上↗，

从而要判断零点所在区间，只需看哪个区间端点函数值异号，下面逐个验证选项，

因为 $f(-4)=2^{-4}+\frac{-4}{3}<0$，$f(-2)=2^{-2}-\frac{2}{3}<0$，所以 $f(x)$ 在 $(-4,-2)$ 上无零点；

又 $f(-1)=2^{-1}-\frac{1}{3}>0$，所以 $f(-2)f(-1)<0$，故 $x_0\in(-2,-1)$.

2.（2022•临湘期末•★）函数 $f(x)=x+\cos x$ 的零点所在的区间为（　　）

（A）$(-1,-\frac{1}{2})$　　（B）$(-\frac{1}{2},0)$　　（C）$(0,\frac{1}{2})$　　（D）$(\frac{1}{2},1)$

答案：A

解析：先判断单调性，这里需要求导来判断，由题意，$f'(x)=1-\sin x\ge 0$，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上↗，

从而 $f(x)$ 最多一个零点，要判断零点所在区间，只需看哪个区间端点函数值异号，下面逐个验证选项，

由题意，$f(-1)=-1+\cos(-1)<0$，$f(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}+\cos(-\frac{1}{2})=-\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{1}{2}=\cos\frac{1}{2}-\cos\frac{\pi}{3}$，

要判断上式的正负，可结合 $y=\cos x$ 在 $(0,\pi)$ 上的单调性来比较 $\cos\frac{1}{2}$ 和 $\cos\frac{\pi}{3}$ 的大小，

注意到 $y=\cos x$ 在 $(0,\pi)$ 上↘，且 $0<\frac{1}{2}<\frac{\pi}{3}<\pi$，所以 $\cos\frac{1}{2}>\cos\frac{\pi}{3}$，从而 $f(-\frac{1}{2})>0$，

故 $f(x)$ 的零点所在的区间是 $(-1,-\frac{1}{2})$.

【反思】像这种单选题，也可不判断单调性，直接看端点值，解析为了严谨，仍然判断了单调性.

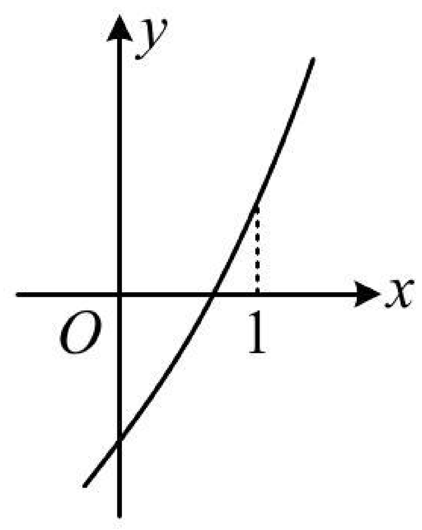
3.（★）若函数 $f(x)=2^x+3x+a$ 在 $(0,1)$ 内存在零点，则实数 a 的取值范围是（　　）

（A）$(-\infty,-5)$　　（B）$(-5,-1)$　　（C）$(0,5)$　　（D）$(1,+\infty)$

答案：B

解析：先判断单调性，因为 $y=2^x$ 和 $y=3x+a$ 都在 $\mathbf{R}$ 上↗，所以 $f(x)=2^x+3x+a$ 在 $\mathbf{R}$ 上↗，

如图，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上存在零点等价于 $\begin{cases}f(0)<0\\f(1)>0\end{cases}$，即 $\begin{cases}1+a<0\\5+a>0\end{cases}$，解得：$-5<a<-1$.



4．（2022·沈阳模拟·★★）设函数 $f(x)=\frac{1}{3}x-\ln x$，则 $f(x)$（　　）

（A）在区间 $(\frac{1}{\mathrm{e}},1)$，$(1,\mathrm{e})$ 内均有零点

（B）在区间 $(\frac{1}{\mathrm{e}},1)$，$(1,\mathrm{e})$ 内均没有零点

（C）在区间 $(\frac{1}{\mathrm{e}},1)$ 内有零点，在 $(1,\mathrm{e})$ 内没有零点

（D）在区间 $(\frac{1}{\mathrm{e}},1)$ 内没有零点，在 $(1,\mathrm{e})$ 内有零点

答案：D

解析：先判断单调性，这里需要求导来判断，由题意，$f'(x)=\frac{1}{3}-\frac{1}{x}=\frac{x-3}{3x}$，

所以 $f'(x)>0\Leftrightarrow x>3$，$f'(x)<0\Leftrightarrow 0<x<3$，从而 $f(x)$ 在 $(0,3)$ 上↘，在 $(3,+\infty)$ 上↗，

又 $f(\frac{1}{\mathrm{e}})=\frac{1}{3\mathrm{e}}+1>0$，$f(1)=\frac{1}{3}>0$，$f(\mathrm{e})=\frac{\mathrm{e}}{3}-1<0$，所以 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{\mathrm{e}},1)$ 上没有零点，在 $(1,\mathrm{e})$ 上有零点.

5．（★★）已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}-2x-5$ 的零点位于区间 $(m,m+1)$，$m\in\mathbf{Z}$，则 $2^m+\log_4|m|=$（　　）

（A）$-\frac{1}{4}$　　（B）$\frac{1}{4}$　　（C）$\frac{1}{2}$　　（D）$\frac{3}{4}$

答案：D

解析：先判断单调性，$y=\mathrm{e}^{-x}$ 和 $y=-2x-5$ 都在 $\mathbf{R}$ 上↘⇒ $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上↘，所以 $f(x)$ 最多一个零点，

欲求 $2^m+\log_4|m|$，得先求 m，我们需要把 $f(x)$ 的零点估计在两个相邻的整数之间，

通过计算可得 $f(-2)=\mathrm{e}^2-1>0$，$f(-1)=\mathrm{e}-3<0$，所以 $f(x)$ 的零点 $x_0\in(-2,-1)$，

由题意，$x_0\in(m,m+1)$ 且 $m\in\mathbf{Z}$，所以 $m=-2$，故 $2^m+\log_4|m|=2^{-2}+\log_4|-2|=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$.

6．（2022·洛阳期末·★★★）已知函数 $f(x)=x+x^3$，$g(x)=x+3^x$，$h(x)=x+\log_3 x$ 的零点分别为 x_1，x_2，x_3，则（　　）

（A）$x_2>x_3>x_1$　　（B）$x_3>x_2>x_1$　　（C）$x_1>x_2>x_3$　　（D）$x_3>x_1>x_2$

答案：D

解析：要比较三个函数的零点，可先看看零点是否可求，观察发现 $f(x)$ 的零点可求，

$f(x)=0\Leftrightarrow x^3+x=0\Leftrightarrow x(x^2+1)=0\Leftrightarrow x=0$，所以 $x_1=0$；

函数 $g(x)$ 和 $h(x)$ 的零点均不可求，故考虑用零点存在定理估算其范围，

因为 $y=x$ 和 $y=3^x$ 均在 $\mathbf{R}$ 上↗，所以 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上↗，又 $g(-1)=-1+3^{-1}=-\frac{2}{3}<0$， $g(0)=3^0=1>0$，

所以 $g(x)$ 的零点 $x_2\in(-1,0)$；因为 $y=x$ 和 $y=\log_3 x$ 均↗，所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上↗，

又 $h(\frac{1}{3})=\frac{1}{3}+\log_3\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}<0$， $h(1)=1>0$，所以 $h(x)$ 的零点 $x_3\in(\frac{1}{3},1)$，故 $x_3>x_1>x_2$.